



**ОБРАБОТКА МАТЕРИАЛОВ
ИМПУЛЬСНЫМИ НАГРУЗКАМИ**

Новосибирск 1990

ОСОБЕННОСТИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ЧАСТИЦ РАЗНЫХ МАСС

В.Ф. НЕСТЕРЕНКО, Институт гидродинамики им. А.А. Лаврентьева
СО АН СССР;

А.Н. ЛАЗАРИДИ, СКБ ГИТ СО АН СССР, Новосибирск

Интерес к одномерным периодическим дискретным системам обусловлен возможностью выявления качественных нелинейных волновых эффектов, которые могут присутствовать при исследовании реальных трехмерных сред. По этой причине так интенсивно изучаются одномерные дискретные цепочки с различными видами потенциалов взаимодействия между соседними частицами. Отдельное место в этом ряду занимают периодические структуры из чередующихся частиц разных масс, являющиеся более близким приближением к реальным средам. Так, из классической задачи о линейной периодической цепочке разных масс известно, что в данной системе появляются качественно новые эффекты – оптическая мода колебаний, появление запрещенной полосы частот.

При использовании зернистых сред, содержащих частицы разного размера в устройствах, ослабляющих импульсные нагрузки, практически важным является изучение влияния микроструктуры среды на её демпфирующие свойства, их оптимизацию. В этом случае, для выявления роли микроструктуры, исключительно полезен анализ одномерных зернистых систем. Конечно, с другой стороны, упрощение реальной среды одномерной может не охватывать полностью многообразия её поведения.

Изучение одномерной системы одинаковых частиц, взаимодействующих по закону Герца, показало, что ^{если} эта среда нагружена внешней постоянной силой с амплитудой много большей чем у начального возмущения, ^{то она} описывается стандартным нелинейным уравнением с решениями типа уравнения КДВ (Кортевега-де Вриза).

Важные принципиальные отличия возникают, когда цепочка находится в свободном состоянии, т.е. длинноволновая скорость звука в "обычном понимании" для данной системы стремится к нулю. При амплитуде возмущений в среде, много большей начального сколь угодно малого поджатия в цепочке, она описывается в длинноволновом приближении нелинейным волновым уравнением, имеющим аналитическое решение в виде стационарной уединен-

ной волны с её характерным пространственным размером, равным пяти диаметрам частиц /1/. Проведенный численный анализ и данные экспериментов выявили удовлетворительное согласие /2/ как в качественном отношении, так и количественно.

Здесь рассматривается периодическая система чередующихся частиц разных масс (m_1, m_2), взаимодействующих по закону Герца. Представляет интерес выявление особенностей её поведения в сравнении с системой частиц равных масс при одинаковых условиях нагружения.

Нами были рассмотрены несколько типов периодических систем чередующихся частиц разных масс.

1. Цепочки частиц с отношением масс $m_1/m_2 = K = 2, 4, 16, 24, 64$. При этом соблюдались следующие требования - равенство массы ячейки системы одинаковых частиц массе ячейки в данной цепочке с соответствующим равенством силовых констант, а также с неизменным расстоянием между центрами соседних частиц (a). С точки зрения континуального подхода рассматриваемая цепочка адекватна цепочке частиц одинаковых масс, т.е. имеет ту же плотность и длинноволновую скорость звука.

2. Периодическая цепочка чередующихся частиц из материалов, имеющих различные модули Юнга (сталь, вольфрам), с отношением масс между ними, как в п. 1, при сохранении тех же требований к массе ячейки и пространственным размерам.

3. Система с отношением масс между частицами, что и в п. 1, однако масса ячейки отличается от массы ячейки цепочки одинаковых частиц. Также, как в п. 2, использовались частицы из разных материалов, имеющих разные модули Юнга (сталь, вольфрам). Пространственные размеры частиц были равны размерам частиц в цепочке равных масс.

Система чередующихся частиц разных масс изучалась аналитически, численно и экспериментально в доступных случаях. Постановка численных экспериментов была аналогична /2/. В экспериментах, кроме регистрации силы, действующей на жесткую стенку /2/, измерялась сила сжатия, действующая на выбранную частицу в цепочке.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Анализ длинноволнового приближения. Принципиальные трудности при решении системы уравнений движения цепочки частиц раз-

ных масс заключаются в выводе связи между смещениями соседних частиц малой и большой масс. В длинноволновом приближении нами была использована связь между смещениями соседних частиц, предлагаемая в /3/:

$$y_{2n} = b(y_n + b_1 a y_{nx} + b_2 \frac{a^2}{2} y_{nxx} + b_3 \frac{a^3}{6} y_{nxxx} + b_4 \frac{a^4}{24} y_{nxxxx} + \dots).$$

Здесь y_{2n} - смещение малой массы (m_2); y_n - смещение большой частицы (m_1); a - начальное расстояние между центрами соседних частиц; b_1, b_2, b_3, b_4 - константы, зависящие от соотношения масс.

Связь между смещениями ближайших частиц одинаковой массы задавалась стандартной процедурой:

$$y_{n+1} = y_n + 2a y_{nx} + 2a^2 y_{nxx} + \frac{4}{3} a^3 y_{nxxx} + \frac{2}{3} a^4 y_{nxxxx} + \dots$$

для больших частиц и

$$y_{2n-1} = y_{2n} - 2a y_{2nx} + 2a^2 y_{2nxx} - \frac{4}{3} a^3 y_{2nxxx} + \frac{2}{3} a^4 y_{2nxxxx} + \dots$$

для малых частиц.

Для слабоподжатой цепочки (амплитуда возмущения много больше начальной сколь угодно малой деформации в цепочке), используя процедуру вывода уравнения, аналогичную /I/, получаем нелинейное уравнение для системы частиц разных масс, описывающее стационарное волновое движение большой массы:

$$\frac{V^2}{c^2} \xi_x = \frac{3}{2} b_2 \cdot \xi^{1/2} \xi_x + \frac{a^2}{8} b_4 \xi^{1/2} \xi_{xxx} + \frac{a^2}{8} b_2 b_3 \frac{\xi_x \xi_{xx}}{\xi^{1/2}} - \frac{a^2}{64} b_2^3 \frac{\xi_x^3}{\xi^{3/2}},$$

$$\xi = -y_x > 0, \quad c^2 = \frac{4}{3\pi(k_1 + k_2)} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^{1/2} \cdot \frac{a^5}{\pi_1}; \quad k_1 = \frac{1 - v_1^2}{\pi E_1}, \quad k_2 = \frac{1 - v_2^2}{\pi E_2},$$

которое с точностью до коэффициентов b_i совпадает с уравнением /I/. Очевидно, из вида уравнения, что для конкретного отношения масс между частицами, оно должно иметь свое решение, описывающее это отношение. При равенстве масс данное уравнение переходит в соответствующее уравнение /I/, что легко получить с использованием выражения для b_i из /3/. Представляет интерес предельный случай, когда $K \gg I$. Уравнение, аналогично /I/, имеет стационарное решение:

$$\xi = \left(\frac{5}{8} \frac{v^2}{c^2} \right)^2 \cos^4 \left(\frac{x}{a\sqrt{10}} \right)$$

с характерным пространственным размером уединенной волны, равным $\lambda \approx 10 \cdot a$.

Таким образом, из вида решения можно сделать следующий вывод — при сохранении неизменными расстояний между центрами соседних частиц в цепочках одинаковых и разных масс, а также радиусов кривизны в точках контактов частиц, возмущение в цепочке разных масс с $K \gg 1$ при прочих равных условиях имеет пространственную ширину в два раза большую чем в цепочке одинаковых масс.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В численных экспериментах по свободному концу цепочки производился удар поршнем массой $M_n = 5 \cdot m$ (m — масса частицы в цепочке одинаковых масс), другой конец цепочки контактировал с жесткой стенкой. Скорость поршня везде $U_n = 1$ м/с. Удар поршнем производился по более легкой частице, а в некоторых случаях (для выявления возможной качественной разницы в поведении) по тяжелой. Результаты численных расчетов системы типа п. 1, состоящей из стальных частиц, приведены на рис. 1.

Цепочка с отношением масс, равным $K = 64$ ($m_1 + m_2 = 2m$), имела число частиц $N = 40$. Удар поршнем производился по более легкой частице. С целью сравнения на рис. 2 показаны соответствующие профили сил и скорости в цепочке частиц одинаковых масс ($m_1 = m_2 = m$, $N = 40$). Радиусы кривизны в точках контактов и расстояния между центрами частиц в обеих цепочках совпадали. Нумерация частиц здесь и в последующих постановках производилась в направлении от жесткой стенки.

При сравнении рис. 1 и 2 отчетливо видно качественно отличное поведение периодической системы разных масс в одинаковых условиях нагружения. Так, в цепочке равных масс образуется пять хорошо выделенных уединенных волн (рис. 2а, в), тогда как в исследуемой только три (рис. 1а, б). При этом их пространственная и временная ширина примерно в два раза больше, чем пространственный размер уединенной волны на рис. 2, что согласуется с результатами анализа длинноволнового приближения при $K \gg 1$.

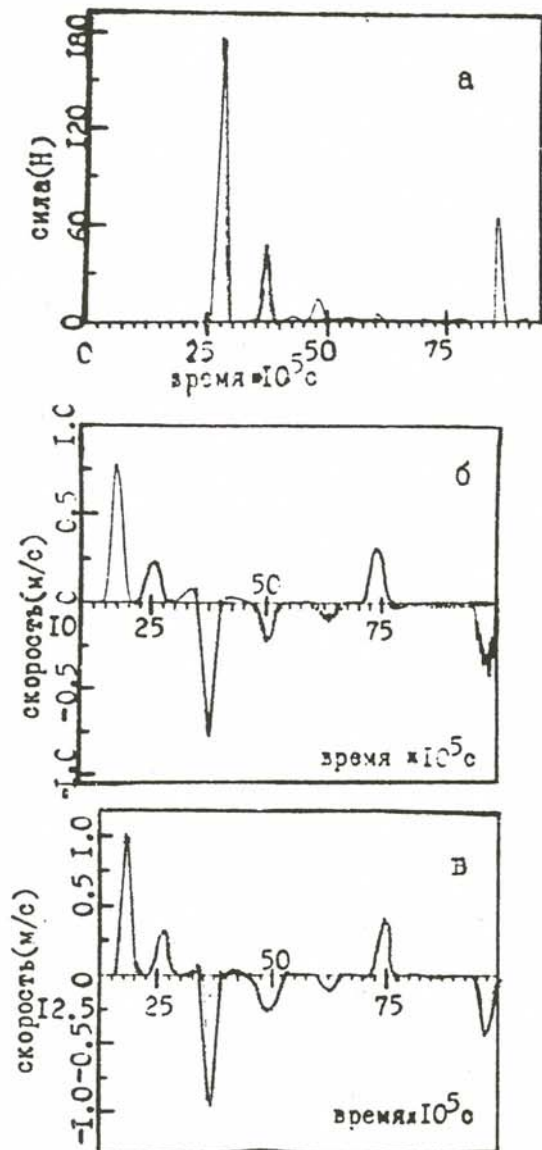


Рис.1. Численный счёт периодической цепочки разных масс с $K = 64$, ($m_I + m_2 = 2 \cdot m$, число частиц $N = 40$). Частицы из материала с модулем Юнга $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; радиусы кривизны в точка контактов $\Gamma = 2,375$ мм; расстояние между центрами частиц $a = 4,75$ мм, масса поршня $M_{II} = 5 \cdot m$, $v_{II} = 1$ м/с; удар поршнем по легкой частице: а) сила на стенке; б) скорость 14-й легкой частицы; в) скорость 15-й тяжелой частицы.

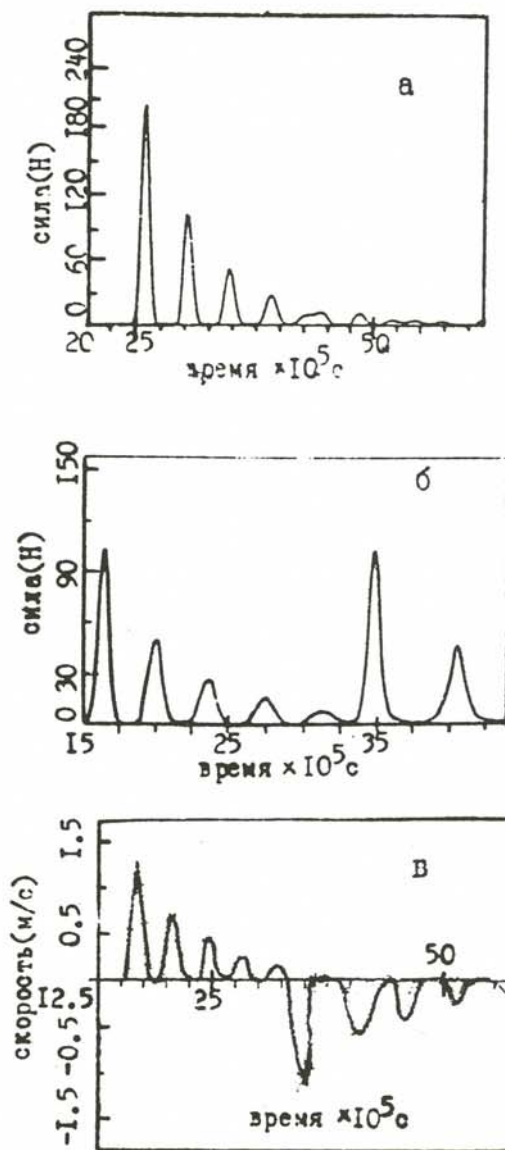


Рис.2. Численный счёт цепочки равных масс $m_1 = m_2 = m$; число частиц $N = 40$. Частицы из материала с модулем Юнга $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м², диаметром 4.75 мм, масса поршня $M_{II} = 5 \cdot m$; $v_{II} = 1$ м/с: а) сила на стенке; б) сила на 15-й частице в цепочке; в) скорость 15-й частицы.

Скорости распространения уединенных волн в обеих системах одинаковы ($V \approx 772$ м/с), однако амплитуды различаются. Скорость движения тяжелой частицы (рис. 1 в), кроме отмеченных особенностей, качественно не отличается от характера изменения скоростей в обычной цепочке. В отличие от этого, в скорости движения легкой частицы (рис. 1 б) наблюдается новый эффект, такой как высокочастотная модуляция основного профиля скорости, которая становится более заметной при уменьшении амплитуды уединенной волны, что, вероятно, связано с меньшей степенью поджатия легкой частицы между тяжелыми. Максимальные значения скоростей тяжелых частиц больше чем легких, а в целом они меньше чем в системе равных масс.

Интересные особенности в системе типа п. I проявляются при малом отношении масс, например, если $K = 2$ (рис. 3). Поведение системы становится качественно иным по сравнению со случаем $K \gg 1$. Для профиля скорости малой частицы (рис. 3 в) теперь характерно выделение головного возмущения с двумя максимумами, за которым следует хвост периодических колебаний с уменьшающейся амплитудой. Период между максимумами на головном пике $\Delta t_{1,2}$ отличается от периода последующих колебаний. Так, $\Delta t_{1,2} = 0,15 \cdot 10^{-4}$ с, а за ним $\Delta t_{4,5}$; $\Delta t_{5,6}$; $\Delta t_{6,7}$; $\Delta t_{7,8} = 0,275 \cdot 10^{-4}$ с (рис. 3 б). По мере распространения возмущения по цепочке эти значения остаются неизменными, что было видно в численном счете при увеличении числа частиц в цепочке до $N = 80$. Практически на постоянном уровне остаются амплитуды колебаний и величины максимумов на пике (наибольшее отклонение не превышает 5%). Все это свидетельствует в пользу стационарного характера наблюдаемой волновой картины. В целом скорость легкой частицы имеет положительное значение, однако в отдельные моменты времени в профиле скорости появляются значения противоположного знака незначительной амплитуды до момента прихода отраженной волны от стенки.

Изменяется в случае $K = 2$ и профиль скорости тяжелой частицы (рис. 3 в), где наблюдается выделение двух несимметричных пиков с разной амплитудой. По мере распространения происходит их разделение с сохранением амплитуд и форм. Характерным в профиле является наличие в некоторые моменты времени участков с постоянной скоростью движения частицы. При этом существенное изменение претерпевает характер силы, действующей на

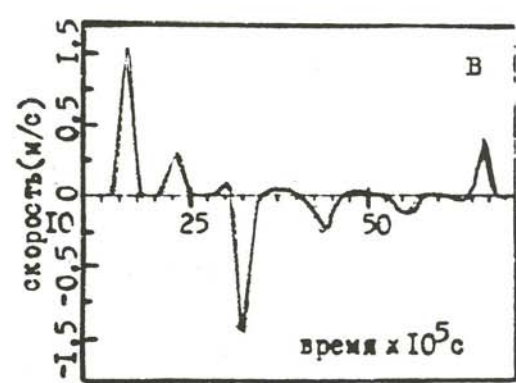
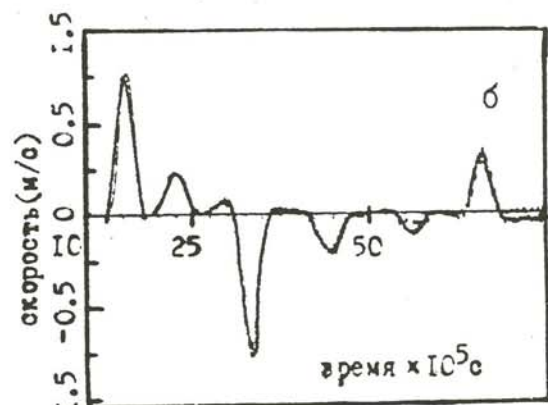
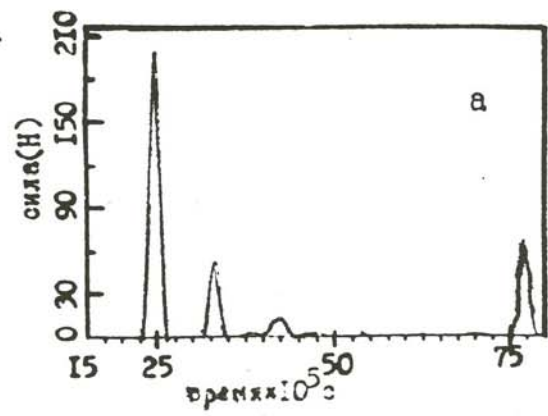
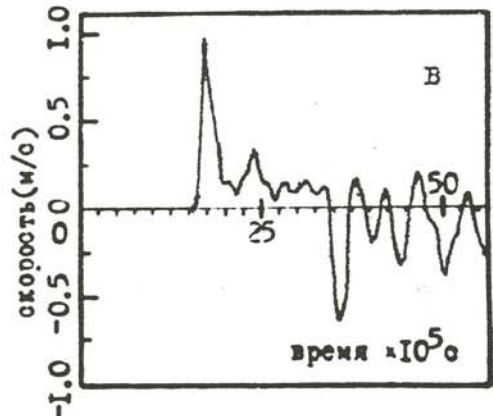
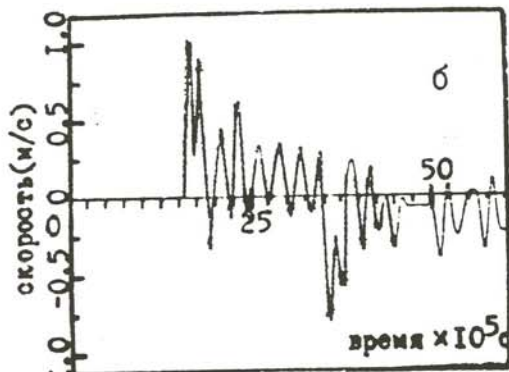
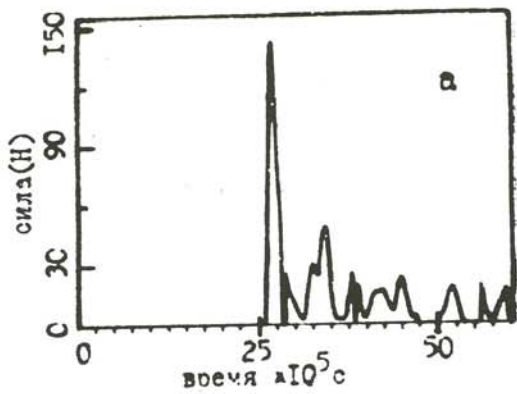


Рис.3. Периодическая цепочка с $K = 2$, $(m_1 + m_2 = 2m)$; число частиц $N = 40$. Модуль Юнга частиц $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; радиусы кривизны в точках контактов $r = 2,375$ мм; расстояние между центрами частиц $a = 4.75$ мм; $Mn = 5m$; $U_n = 1$ м/с; удар поршнем по легкой частице: а) сила на стенке; б) скорость 14-й легкой частицы, в) скорость 15-й тяжелой частицы.

Рис.4. Периодическая цепочка с $K = 64$, $(m_1 + m_2 = 2m)$, $N = 40$. Частицы из разных материалов (сталь - $E_1 = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; вольфрам - $E_2 = 3.9 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\nu_2 = 0.34$), $r = 2.375$ мм; $a = 4.75$ мм; $Mn = 5m$; $U_n = 1$ м/с; удар поршнем по легкой частице: а) сила на стенке; б) скорость 14-й легкой частицы; в) скорость 15-й тяжелой частицы.

жесткой стенке (рис. 3а), в отличие от систем с $K = 1$ и 64 (рис. 1а и 2а). Головной пик является несимметричным, а за ним следует иррегулярное изменение силы, хотя возможно, что второй пик с двумя максимумами является следующей уединенной волной. Амплитуда силы на стенке ($F = 144 \text{ Н}$) имеет меньшее значение, чем в системах с $K = 1$ ($F = 200 \text{ Н}$) и $K = 64$ ($F = 177 \text{ Н}$).

Можно отметить, что амплитуда силы на стенке в зависимости от отношения масс имеет вид кривой с минимумом при $K = 4$ ($F = 90 \text{ Н}$), что подчеркивает качественное влияние микроструктуры среды на характер волновых процессов, в частности, на взаимодействие с жесткой стенкой. Фазовая скорость распространения уединенных волн была такой же, как в цепочках с отношением масс $K = 1$ и 64, что согласуется с тождественностью систем на континуальном уровне.

Анализ численных расчетов системы типа п. 2 показал сохранение всех качественных особенностей поведения, присущих системе п. 1. Основное отличие, как и следовало ожидать, заключается в увеличении фазовой скорости распространения уединенных волн вследствие роста значений эффективного модуля Юнга системы. Это также согласуется с зависимостью фазовой скорости уединенной волны от модуля Юнга [2]. В отличие от цепочки частиц из одного материала, в данной системе происходит возрастание амплитуд сил, действующих на жесткой стенке (рис. 4а) и на частице в цепочке. Временная ширина уединенных волн (τ) уменьшается (рис. 4б, в), однако пространственный размер образующихся волн ($\lambda = V \cdot \tau$) остается таким же, как в системе типа п. 1, вследствие большей фазовой скорости.

Численный счет системы типа п. 3 с тем же отношением масс, что и в системах типа п. 1 и 2, но с большей массой ячейки ($M_j \approx 5 \cdot m$) показал, что общий характер ее поведения мало отличается от поведения систем типа п. 1 и 2 в равных условиях нагружения. Так, система с отношением масс $K \approx 4$; $m_1 + m_2 \approx 5 \cdot m$; $M_n = 10 \cdot m$; $N = 41$ (рис. 5) ведет себя качественно подобно с цепочкой частиц $K = 4$ ($m_1 + m_2 = 2 \cdot m$). При этом первой и последней частицей были стальные шарики ст. ШХ 15, $\phi 4,75 \text{ мм}$, которые в цепочке чередовались для удобства сравнения с экспериментом с вольфрамовыми цилиндрами $h = d = 4,75 \text{ мм}$. Количественные отличия наблюдаются в величине фазовой скорости, которая в этой цепочке меньше и составляла $V = 686$

м/с, а также амплитудных значениях силы, действующей на жесткую стенку ($F = 216 \text{ Н}$) и на 15 частицу в цепочке ($F = 165 \text{ Н}$). Претерпевает изменение и временная ширина импульсов, но их пространственный размер остается по-прежнему равным $\lambda \approx 10 \cdot a$. Отметим, как и в системах типа п. 1, п. 2, $K = 2,4$ в профиле силы первой волны, действующей на стенку, имеется временной интервал, в котором она уменьшается до нулевого значения, что, по-видимому, связано с особенностью поведения легкой частицы, зажатой между тяжелой частицей и стенкой, в процессе отражения волны от стенки.

ЭКСПЕРИМЕНТ

Постановка экспериментов была аналогична условиям численного счета (рис. 5). Удар поршнем из стали ЗСХГСА массой $M_p = 10 \text{ м}$ и движущимся с скоростью 1 м/с производился по стальному шарiku. На противоположном конце цепочки в месте контакта со стенкой также располагался шарик. В дополнение к методике /2/, с целью регистрации силы в проходящей волне и для измерения фазовых скоростей волн, в самой цепочке размещался датчик силы, показанный на рис. 6. Конструктивно он выполнялся путем приклеивания к обеим сторонам пьезочувствительной таблетки из ЦТС-19 ($\phi 3,8 \text{ мм}$, толщина 0,5 мм) через изолирующие фторопластовые шайбы толщиной 0,08 мм двух стальных полусфер из того же материала, с теми же радиусами кривизны, что и у шариков в цепочке. Выполненный таким образом датчик имел массу и размер в пределах естественного разброса между самими стальными шариками. Для минимизации эффекта присоединенной массы съём сигнала с датчика осуществлялся с помощью тонких проводов сечением $\sim 0,1 \text{ мм}^2$. Постоянная времени регистрирующей цепи $RC = 10^{-2} \text{ с}$ позволяла производить неискаженную запись процесса.

На рис. 7а показан результат эксперимента, проведенного в указанной постановке при числе частиц в цепочке $N = 41$. Осциллограф работал в режиме внутреннего запуска от верхнего луча (датчик силы в цепочке - 15 частица). Сравнивая рис. 5а, б и 7, можно отметить удовлетворительное качественное подобие профилей сил. Корреляция с численным расчетом имеется по временному интервалу от момента прихода волны на 15 частиц до ее момента выхода на жесткую стенку (нижний луч), ширине наблюдаемых волн и временными интервалами между максимумами первой и второй уеди-

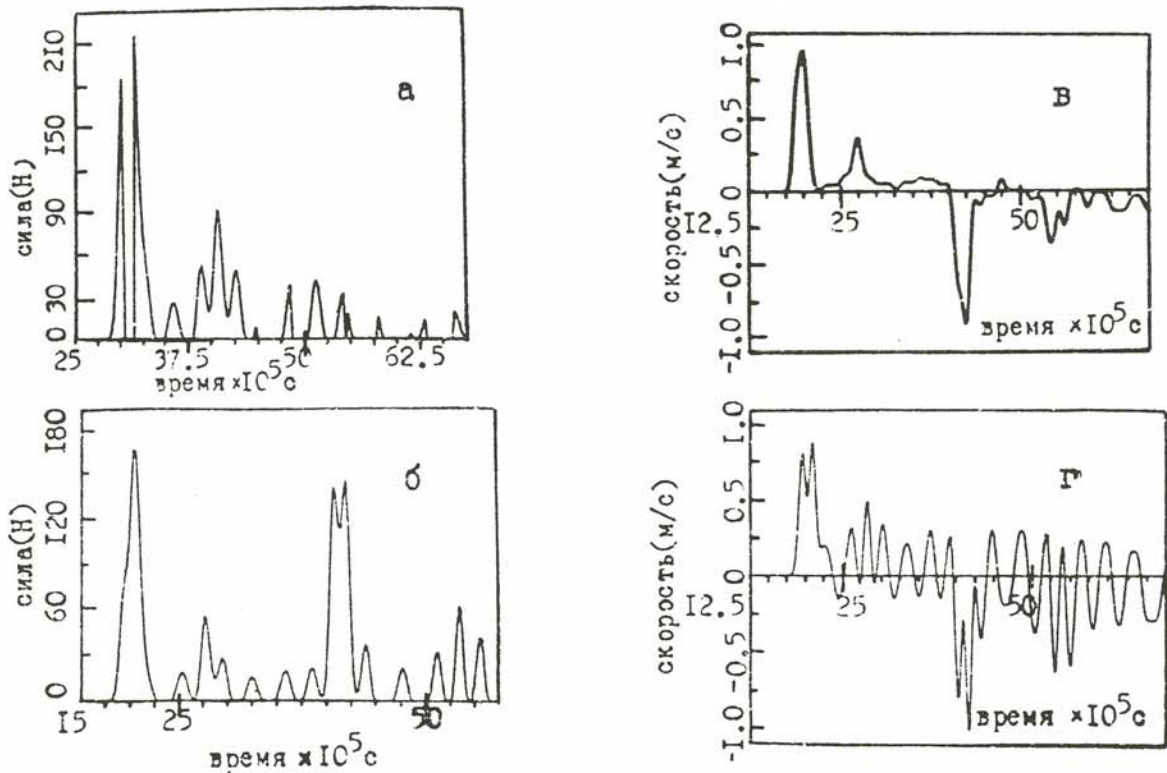


Рис.5. Численный счет периодической цепочки с $K = 4$, $(m_1 + m_2 \approx 5m)$; число частиц $N = 41$. Частицы из разных материалов (сталь - $E_1 = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\nu_1 = 0.29$; $E_2 = 3.9 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\nu_2 = 0.34$); стальные шарики ϕ 4.75 мм; вольфрамовые цилиндры с диаметром, равным высоте $h = 4.75$ мм. Масса поршня $M_p = 10 \cdot m$; $U_p = 1$ м/с; удар поршнем по стальному шарiku: а) сила на стенке; б) сила, действующая на 15-й шарик; в) скорость 16-го цилиндра; г) скорость 15-го шарика.

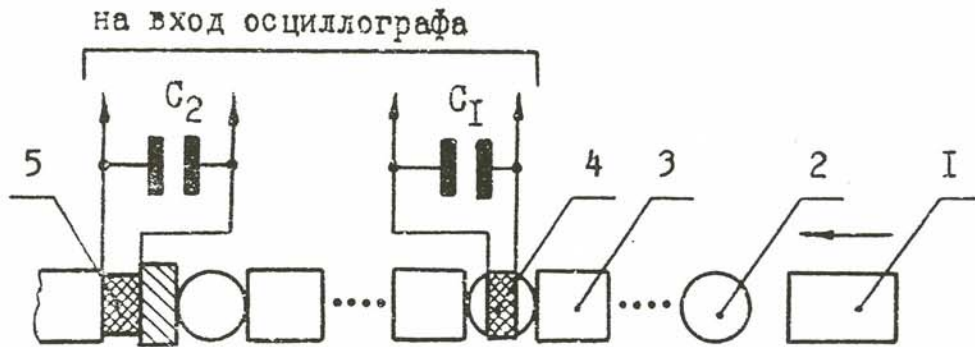


Рис.6. Экспериментальная схема исследования волновых процессов в одномерной цепочке чередующихся частиц разных масс: 1 - стальной поршень; 2 - шарик из ст. ШХ15 (m_2); 3 - вольфрамовый цилиндр (m_1); 4 - пьезодатчик для регистрации силы в проходящей волне ($C_1 = 0.01$ мкФ); 5 - пьезодатчик для регистрации силы в отраженной волне ($C_2 = 0.25$ мкФ).

ненных волн. Отсутствие в экспериментальном профиле особенности, какая имеется в счете на стадии возрастания силы до максимума на стенке (рис. 5а), по-видимому, связана с поджатием последней частицы весом всей цепочки, не учитываемой в численном счете. Это, видимо, существенно ослабляет проявление данного эффекта. Тем не менее о наличии указанной тенденции в эксперименте свидетельствует завал переднего фронта импульса вблизи вершины. В отличие от численного счета, в эксперименте амплитуда сил меньше. Так, например, сила на стенке в эксперименте составляет $F \approx 150$ Н, тогда как в численном счете $F = 216$ Н. Это обусловлено процессами диссипации, присутствующими в реальной системе. С уменьшением числа частиц в системе появляется и удовлетворительное количественное согласие между амплитудными характеристиками в счете и эксперименте. Действительно, как показывает сравнение результатов численного счета и данных эксперимента, проведенных в одинаковой постановке ($M_n = 10 \cdot m$; $U_n = 1$ м/с), для числа частиц в цепочке $N = 21$ амплитуда силы на стенке (рис. 7б) в эксперименте $F \approx 230$ Н, а в численном счете $F = 258$ Н.

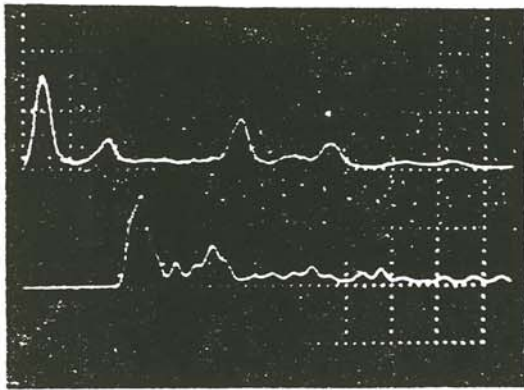
Таким образом, результаты экспериментов удовлетворительно согласуются с данными численных расчетов цепочек частиц разных масс системы типа п. 3.

ВЫВОДЫ

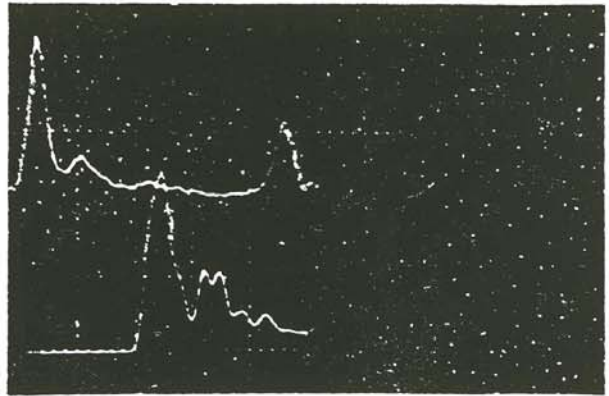
1. Периодические системы, адекватные с позиций континуального подхода по жесткости и плотности, проявляют качественно отличное поведение. При равной фазовой скорости распространения уединенных волн изменяется их число, профиль, амплитудные и временные параметры в одинаковых условиях нагружения. Величина фазовой скорости в численных расчетах удовлетворительно согласуется с найденной из анализа длинноволнового приближения для $k \gg 1$.

2. В периодических системах, эквивалентных по плотности с одинаковым отношением масс, но различающихся по жесткости, наблюдается качественно подобное поведение при равных условиях нагружения. В более жесткой системе увеличиваются фазовые скорости и амплитуды сил, временная ширина уединенных волн уменьшается при сохранении их пространственных размеров.

3. Системы с большей плотностью ведут себя качественно по-



а



б

Рис. 7. Экспериментальные профили сил на 15-й частице (верхний луч) и на стенке (нижний луч) в цепочке чередующихся частиц разных масс. Постановка экспериментов аналогична условиям численного счёта рис. 5: а) - число частиц $N = 41$; б) - число частиц $N = 21$. Масштаб по горизонтали - 50 мкс/дел. Масштаб по вертикали составляет 92 Н/дел (нижний луч) и 95 Н/дел (верхний луч).

добным образом с системами малой плотности по характеру изменения профилей скорости и сил в аналогичных условиях нагружения и одинаковых отношениях масс. Однако при этом уменьшается фазовая скорость возмущений и изменяются их амплитудные и временные характеристики.

4. Результаты экспериментов удовлетворительно согласуются с численным счетом системы чередующихся частиц разных масс ($K \approx 4$) при массе ячейки в цепочке $M_{я} = m_1 + m_2 \approx 5 \cdot m$.

5. В периодической цепочке чередующихся частиц с увеличением отношения их масс растет пространственная ширина уединенных волн, которая при $K \gg 1$ стремится к $\lambda \approx 10 \cdot a$.

Авторы благодарят Суцеву Е.Ю. за помощь в проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нестеренко В.Ф. Распространение нелинейных импульсов сжатия в зернистых средах // ПМТФ. - 1983. - № 5. - С. 136-148.
2. Лазариди А.Н., Нестеренко В.Ф. Обнаружение уединенных волн нового типа в одномерной зернистой среде // ПМТФ. - 1985. - № 3. - С. 115-118.
3. Dash P.C., Patnaik K. Solitons in nonlinear diatomic lattices // Progress of Theor. Phys. - 1981. - Vol. 65, N 5. - P. 1526-1541.